CIP法による時間領域音場解析に関する研究
Study on the time domain sound field analysis by the CIP method

学籍番号　66841
氏　　名　太刀岡 勇気（Tachioka, Yuuki）
指導教員　佐久間 哲哉 准教授

1　はじめに

近年のCAEの普及によりホールなどの音響的な配慮が必要な空間を設計する際には、数値解析による検討が用いられるようになってきた。全周波数の情報を含むインパルス応答が直接求められる時系列解析の中では、時間領域差分法 (FDTD 法) がよく用いられる。FDTD 法の課題としては、高周波数域で数値分散が大きく時間の経過とともに波形が崩れることと、CFL 条件 ($CFL = c\Delta t / \Delta x < 1/\sqrt{N}$: c: 音速、$\Delta t, \Delta x$: 時間・空間離散化幅、N: 次元数) を満たすΔtでしか計算できないことが挙げられる。一方、流体力学分野では同じ時間領域の解法でありながら、数値分散が小さく CFL 条件を超える大きな時間離散化幅で計算が可能な Constrained Interpolation Profile (CIP) 法が提案されている。そこで本研究では CIP 法を室内音場解析にはじめて適用し、当分野に特徴的な問題を整理・検討した。

2　音響問題のための CIP 法の定式化

2.1 CIP 法の原理

CIP 法は特性曲線に沿って値を移流させる移流方程式の高精度解法である。移流元の物理量を求める際に、CIP 補間と呼ばれる補間を行う。

2.2 特性曲線法

空気中の波動伝搬は運動方程式(1)と連続の式(2)で表され、1 次元の場合は以下のようになる。

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

(p: 音圧 [Pa], u: 粒子速度 [m/s], ρ: 空気の密度 [kg/m^3])
式 (1) に c を掛け、式 (2) と和と差を作ると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cu + p) + c\frac{\partial}{\partial x}(\rho cu + p) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cu - p) - c\frac{\partial}{\partial x}(\rho cu - p) = 0 \tag{4}$$

のようになる。$\partial_t f + c\partial_x f = 0$ を移流方程式と呼び(微分演算子$\partial_x = \partial/\partial x$)、一般解は一般の関数$f$を用いて$f(x - \mathrm{c}t)$で表されるため、特性曲線 $x - \mathrm{c}t = k$ 上で常に$f(k)$ となる。$f_x^+ = \rho cu + p, f_x^- = \rho cu - p$ とおくと、式 (3), (4)は、f_x^+ が正方向に、f_x^- が負方向に速さcで伝搬する移流方程式である。Fig. 1 のように、f_x^+, f_x^- を特性曲線に沿って移流させ次ステップの値を求める。この際 2.3 の CIP 補間により移流元の値を求める。このように移流させるだけなので、FDTD 法と異なり高精度でかつ CFL 条件を超える大きな時間離散化幅での計算が可能である。

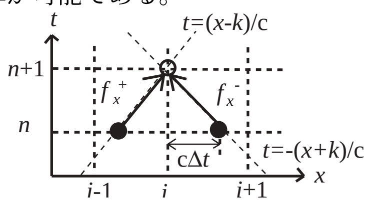

Fig. 1　The method to solve advection equation.

2.3 CIP 補間

FDTD 法では格子点の p と u の値を用いる。これに加えて CIP 法では p と u の微分値も用いる。格子点での値・微分値から 3 次多項式を構成して移流元の値を内挿する。式 (3), (4) を x で微分したものも移流方程式を満たすため、3 次多項式の未知数決定には、格子点における f_x^+, f_x^- に加えて、$\partial_x f_x^+, \partial_x f_x^-$ を用いる。

2.4 多次元への適用

多次元問題は 1 次元問題に方向分離する。2 次元の場合 Fig. 2 の (a) の星印が白丸に移流するのを、式 (3), (4) に加え、y 方向の移流方程式(5), (6) を解くことで、これを実現する。

$$\partial_t(\rho c v + p) + c\partial_y(\rho c v + p) = 0 \qquad (5)$$

$$\partial_t(\rho c v - p) - c\partial_y(\rho c v - p) = 0 \qquad (6)$$

ここで、v は y 方向の粒子速度である。また $f_y^+ = \rho c v + p, f_y^- = \rho c v - p$ とおく。

具体的な手順を示す。

(i)　x 方向に式 (3), (4) によって f_x^+, f_x^- と $\partial_x f_x^+, \partial_x f_x^-$ の移流を行う (Fig. 2 の (b) で星印を黒丸に移流) 。$\partial_y f_x^+, \partial_y f_x^-$ を 1 次の上流差分により求める(最も基礎的かつ必要メモリー量が少ない M 型 CIP 法)。

(ii)　全格子点に対して $p, \partial_x p, \partial_y p$ の更新を行い、f_y^+, f_y^- とその微分を再構成する。

(iii)　y 方向も(5), (6)を用いて移流させる。

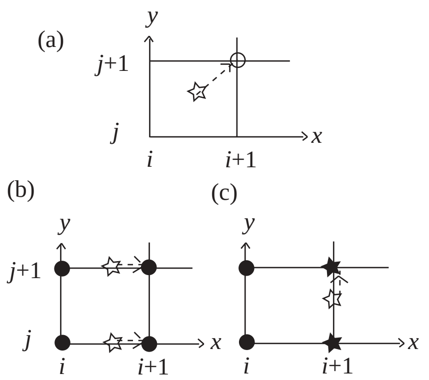

Fig. 2　Procedures of the M-type CIP method.

3　時間・空間離散化に関する検討

本節では初期空間音圧分布をガウス分布の形とし、音源に含まれる最大周波数が 1 kHz の 1/3 オクターブバンド上限となるように設定した。Δx は最小波長の 10 分の 1 程度の 0.033 m、Δt は 0.05 ms (CFL = 0.52) に設定した。

3.1　インピーダンス境界条件の導入

吸音率と 1 対 1 に対応する実数のインピーダンス($Z = p/u$) 境界条件を導入することで室内音場解析が可能になる。導入法を Fig. 3 に示す。現ステップの点が黒丸である。図のように境界を仮定すると、(a) のように負方向に移流する f_x^- と、(b) のように正方向に移流する f_x^+ で格子番号 1 以上のものはそのまま移流させる。境界(格子番号 0)では、次ステップの $p^{n+1} = \{(f_x^+)^{n+1} - (f_x^-)^{n+1}\}/2$, $u^{n+1} = \{(f_x^+)^{n+1} + (f_x^-)^{n+1}\}/2\rho c$ であることより、

$$(f_x^+)^{n+1} = \frac{\rho c - Z}{\rho c + Z}(f_x^-)^{n+1} = r(f_x^-)^{n+1} \qquad (7)$$

となる。剛壁($Z \to \infty$)の場合 $(f_x^+)^{n+1} = -(f_x^-)^{n+1}$ で、吸音境界 ($Z = \rho c$)の場合 $(f_x^+)^{n+1} = 0$ となる。

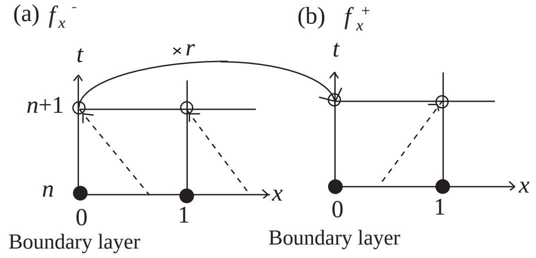

Fig. 3　How to assign boundary condition.

3.2 1 次元音場での検討

インピーダンス境界条件の検証のため、Fig. 4 に示す 1 m の 1 次元音場で両端の吸音率 0.5 として検討する。結果を Fig. 5 に示す。CIP 法は理論解との比較により誤差が少ないことが分かっている。FDTD 法は時間の経過とともに数値分散によって波形が崩れている。また FDTD 法は CFL 条件によりΔt を 0.096 ms 以上にできないが、CIP 法では音源の最大周波数に対応する 0.5 ms まで精度を保ったままΔt を大きくすることができる。

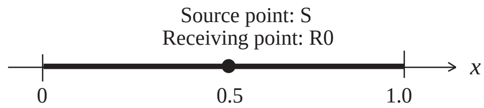

Fig. 4　Geometry of a 1D sound field.

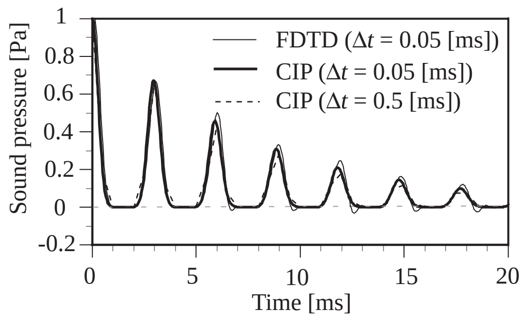

Fig. 5　Pseudo impulse responses calculated by the CIP method (Δt = 0.05, 0.5 [ms]) and the FDTD method (Δt = 0.05 [ms])　(Δx = 0.033 [m]).

3.3 3 次元音場での検討

Fig. 6 に示す 1 辺 1 m の立方体剛壁室を対象に理論解と比較した。結果を Fig. 7 に示す。20 ms までの波形は FDTD 法・CIP 法ともに理論解とよく一致している。これに対して 80 ms 以降では FDTD 法の位相誤差や波形の崩れが大きい。

次に空間離散化幅に関する検討を行う。同形状で全面の吸音率を 0.1 とした。CFL を 0.52 で

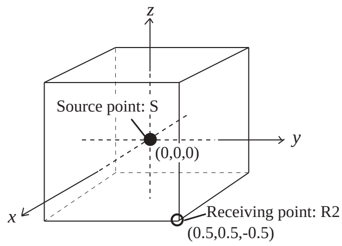

Fig. 6 Geometry of a cubic cavity.

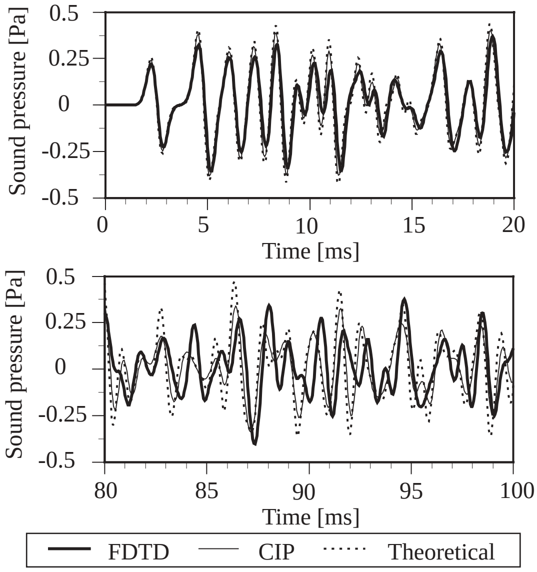

Fig. 7 Pseudo impulse responses calculated by the FDTD method and the CIP method compared to the theory (Δt = 0.05 [ms], Δx = 0.033 [m]).

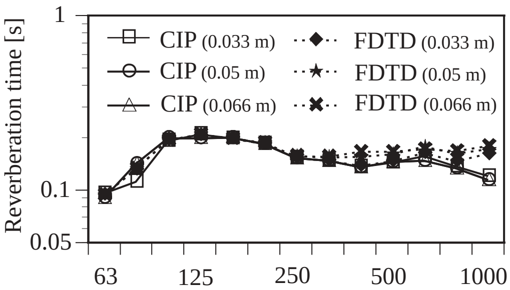

Fig. 8 Reverberation time calculated by the CIP and FDTD method under condition that *CFL* is 0.52.

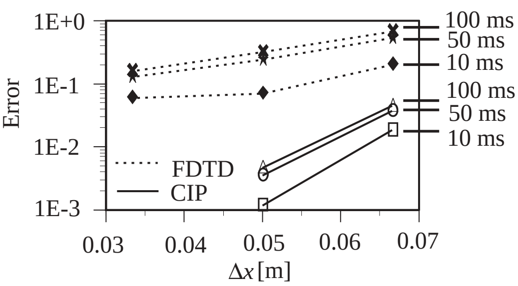

Fig. 9 Square error with Δx and elapsed time.

そろえ、Δx を波長 10 分割から 5 分割程度まで Δx = 0.033, 0.05, 0.066 [m] と変化させた。残響時間を Fig. 8 に示す。Δx の増大とともに FDTD 法では高周波数域での精度が低下している。また波形の崩れの程度を検討するため CIP 法でのΔx = 0.033 [m] の場合を参照解 p_{ref} に、音圧 p の誤差 $\sum_{i=0}^{N}(p-p_{ref})^2 \Big/ \sum_{i=0}^{N} p_{ref}{}^2$ を検討した。0 ms から 10, 50, 100 ms までの経過時間に応じてそれぞれ誤差を算出した。結果を Fig. 9 に示す。経過時間に関わらず、全体的に CIP 法は FDTD 法に比べて精度が高く 2 倍のΔx でも精度が高い。

4 CIVA 法による任意形状への対応

4.1 CIVA 法について

CIP 補間を直交でない格子に対して行うためには多次元の完全 3 次多項式を構成する必要がある。2 次元の完全 3 次多項式の未知数は 10 個であるのに対して、既知数は 3 角形要素を用いた場合、各節点の物理量と微分値の 9 個しかないことが問題である。そこで Fig. 10 に示す面積座標を用いて補間を行う CIVA (Cubic Interpolation with Volume/Area coordinates) 法を音場解析に導入した。

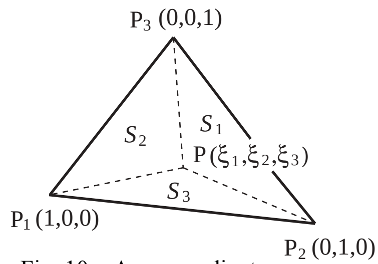

Fig. 10 Area coordinates.

このとき 3 次補間関数は

$$f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\xi_i+d\sum_{j,k=1,j\neq k}^{3}\beta_{jk}\left[\xi_j^2\xi_k+c\xi_1\xi_2\xi_3\right]$$

で与えられる。d = 0 で 1 次補間、1 で 3 次補間である。c = 0.5 とし、α, β は以下の通りである。

$$\alpha_i=f_i$$

$$\beta_{jk}=f_j-f_k+(x_k-x_j)\frac{\partial}{\partial x}f_j+(y_k-y_j)\frac{\partial}{\partial y}f_k$$

4.2 2 次元音場での検討

Fig. 11 に示す 1 m × 1 m の 2 次元音場でΔx = 0.033 [m] を基本に乱数を用いて生成した不均一な 3 角形メッシュに CIVA 法を適用した。周縁部の吸音率は 0.5 とした。Fig. 12 に示す要素

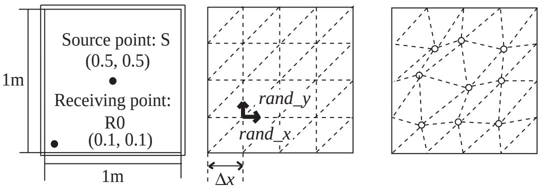

Fig. 11　Geometry of a 2D sound field and generated meshes using random numbers.

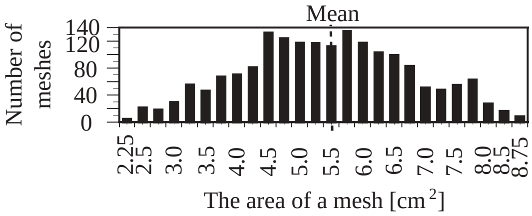

Fig. 12　The area of a mesh generated in the way above.

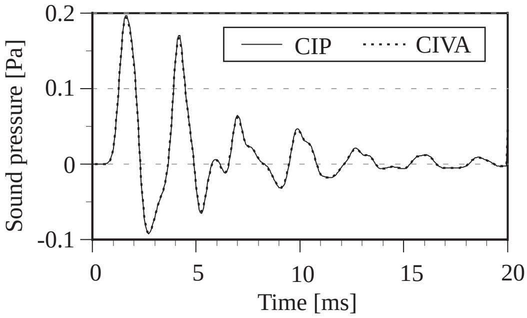

Fig. 13　Pseudo impulse responses calculated by the CIP method (using rectangular meshes) and the CIVA method (using triangular meshes).

毎の面積をみると、最大で 4 倍以上面積が異なる。音圧波形を Fig. 13 に示す。CIP 法と CIVA 法で結果は一致しており、質の悪いメッシュを用いているのにも関わらず、音響問題でも 3 角形要素を用いた解析ができることが示された。

5　周波数特性を持つ境界条件の検討

5.1　概要

FDTD 法では実数のインピーダンスを用いることが多く、任意の周波数特性を持つ境界条件の実現は難しい。CIP 法は 3.1 に示したとおり反射率 r のみで境界条件を定義できるため、入力列f_x^-に対する出力列f_x^+の伝達関数 r が境界面の複素数の反射率になるフィルターを設計すれば、境界条件に周波数特性を持たせることができる。

5.2　音響管での検討

Fig. 14 に示す音響管の解析を行った。Δx = 0.025 [m]、Δt = 71.4 [μs]とし、左端を速度駆動した。流動抵抗 15000 Ns/m^4 の吸音材(厚さ 0.1 m)

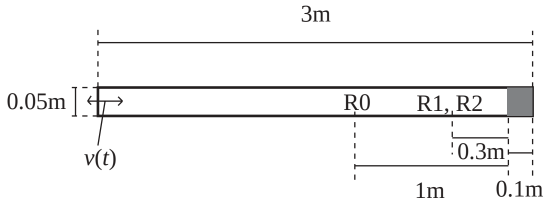

Fig. 14　Geometry of a sound tube with a porous material (0.1 m thickness).

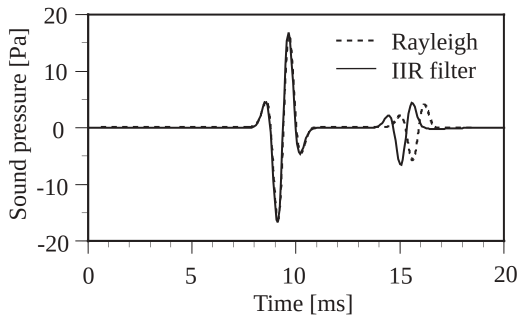

Fig. 15　The incident and reflected waves calculated by the CIP method with the Rayleigh model and the CIP method with boundary condition using IIR filter.

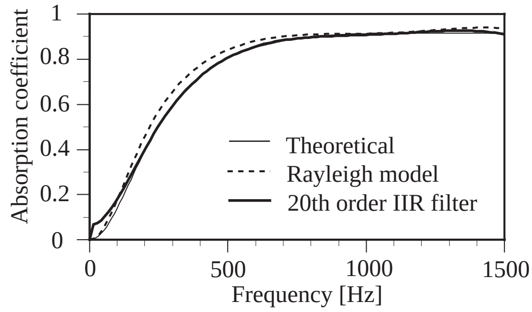

Fig. 16　Normal incidence absorption coefficients.

を右壁に密着させたものを仮定して、理論解(Rayleigh モデル) より 20 次の IIR フィルターを設計した。波形を Fig. 15 に示す。同時に筆者が CIP 法に導入した、吸音材の内部を Rayleigh モデルによりモデリングして内部伝搬を解析する手法による解析解を示している。このように両者の解析結果はよく一致している。伝達関数法により求めた垂直入射吸音率を Fig. 16 に示す。両者ともに理論解とよい対応が見られる。

6　まとめ

CIP 法を室内音場解析に適用し残響時間・波形の両面で FDTD 法よりも高精度であることを示した。また不均一な 3 角形要素による解析が行えた。さらに境界条件としてフィルターを用いて任意の周波数特性を持つ境界条件を実現した。