

大規模音場予測のための高速多重極境界要素法の構築

Development of Fast Multipole Boundary Element Method for Large-Scale Sound Field Analysis

学籍番号 96625

氏名 安田 洋介 (Yasuda, Yosuke)

指導教官 佐久間 哲哉 助教授

1. 研究の背景と目的

1.1. 背景 音環境計画において、その物理的基礎となる音場の予測は重要な役割を担っている。波動音響的手法は音の波動性を考慮した高精度な予測が可能であるが、大規模問題において計算量・必要記憶容量が必然的に膨大となる。このため有限要素法 (FEM)、境界要素法 (BEM) といった従来の解析手法では、計算機能力の制約により、現在においても小空間・低周波数域に限定された解析が行われるのみである。

1.2. 高速多重極境界要素法 (fast multipole boundary element method : FMBEM) 近年天体物理学等の分野で大自由度のポテンシャル問題における計算効率化のための高速多重極アルゴリズムが提案されている。BEM への適用も試みられており、計算量・必要記憶容量を大幅に低減できる可能性が示されている。

1.3. 本研究の目的 3次元での大規模音場予測を目指し、計算効率の大幅な低減のための高速多重極アルゴリズムを多段階に適用した境界要素法 (高速多重極境界要素法 : FMBEM) を構築すること、及び数値的評価による検討を通して手法の実用化、汎用化のための様々な知見を得ることである。

2. 解析アルゴリズムの構築

2.1. 境界要素法による音場の定式化

Kirchhoff-Helmholtz 積分方程式に Fig.1 に示す3種の境界条件を代入し離散化すると、最終的に以下の連立方程式が得られる。

$$(\mathbf{E} - jk\mathbf{C} - \mathbf{B})\mathbf{p} = -j\omega\rho\mathbf{A}\mathbf{v} \quad (1)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} \quad (2), \quad A_{ij} = \int_{\Gamma_1} N_j(\mathbf{r}_q)G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)dS_q \quad (3),$$

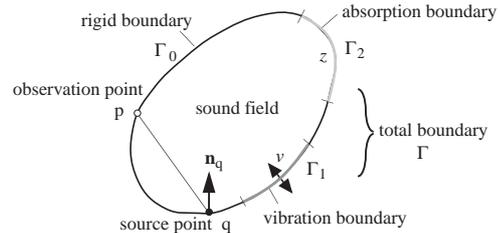


Fig.1 Illustration of a sound field with three kinds of boundary.

$$B_{ij} = \int_{\Gamma} N_j(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{\partial n_q} dS_q \quad (4), \quad C_{ij} = \int_{\Gamma_2} N_j(\mathbf{r}_q) \frac{G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q)}{z(\mathbf{r}_q)} dS_q \quad (5)$$

但し、 \mathbf{p} : 音圧ベクトル、 \mathbf{v} : 速度ベクトル、 z : 比音響インピーダンス、 δ_{ij} : クロネッカーのデルタ、 N_j : 節点 j の内挿関数、 $\partial / \partial n$: 境界面法線方向微分。

Eq.(3, 4, 5) における3次元音場基本解 G は次式で表される。

$$G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) = \exp(jkr_{pq}) / 4\pi r \quad (6)$$

但し、 k : 波数。

G は1重層ポテンシャル、 $\partial G / \partial n$ は2重層ポテンシャルである。Eq.(1)を数値的に解くことにより境界上の音圧が算出される。

2.2. セル階層構造の導入 BEMにおいては影響関数行列 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} が密な Eq.(1) を解く必要があり、大規模解析における障害となっていた。一方FMBEMでは、Eq.(1)に反復解法を用いる際、行列ベクトル積の積和を全節点間で実行する代わりに、セルによる要素のグループ化を通してセル内要素群の寄与をセル代表点の多重極展開として集積し、セル間で影響を評価することにより、計算量・必要記憶容量を大幅に低減する。さらに、セルの階層構造を導入して多重極アルゴリズムを多段階に適用することで一層の効率化が図られる。Fig.2に2次元問題におけるセル構造を示す。領域全体を内包するルートセルを設定し、下位レベルのセルへと階

層化する．要素からのポテンシャルの寄与は，まず要素の所属する最下位レベルセル(最小サイズのセル)中心点における多重極展開として集積され(Fig.3: ステップ1),同様に各セルの所属する上位セル中心点へと集積される(ステップ2).各セル中心点に集積された寄与は遠方のセル中心点における影響へと変換され集積される(ステップ3).集積された影響は自身の下位レベルのセル中心点へと逐次分配され(ステップ4).最下位レベルにおいて要素にまで分配される(ステップ5).最後に多重極展開で扱えない近傍のセルからの影響を要素同士で直接算出する(ステップ6).

2.3. 多重極展開による影響関数の表現
Eq.(6)をセル構造に対応付けた多重極展開表現で表すと次式となる．

$$G(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q) = \frac{jk}{16\pi^2} \oint E_{p\lambda_{m_L}}(\mathbf{k}) \prod_{l=1}^{L-1} E_{\lambda_{m_{l+1}} \lambda_{m_l}}(\mathbf{k}) \cdot T_{\lambda_{m_L} \lambda_{m_1}}(\hat{\mathbf{k}}) \prod_{l=1}^{L-1} E_{\lambda_{m_l} \lambda_{m_{l+1}}}(\mathbf{k}) E_{\lambda_{m_L} \lambda_{m_1}}(\mathbf{k}) d\hat{\mathbf{k}} \quad (7)$$

$$T_{pq}(\hat{\mathbf{k}}) = \sum_{l=0}^{N_c} j^{l(2l+1)} h_l^{(1)}(kr_{pq}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{pq}) \quad (8)$$

$$E_{pq}(\mathbf{k}) = \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{pq}) \quad (9)$$

$$\oint f(\hat{\mathbf{k}}) d\hat{\mathbf{k}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \sum_{i=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{2N_k} w_i^s w_j^c f(\theta_i, \varphi_j) \quad (10)$$

但し， \mathbf{k} : 波数ベクトル $\hat{\mathbf{k}}$: 波数単位ベクトル $\oint d\hat{\mathbf{k}}$: 単位球面積分 $h_l^{(1)}$: 第1種球 Hankel 関数 P_l : Legendre 多項式， N_c : 無限級数打ち切り次数， w : 積分点の重み．

上式を BEM の各影響関数 Eq.(3, 4, 5) に対応付けることで，Eq.(1)における各行列ベクトル積の多重極展開表現が可能となる．

2.4. 計算効率の理論的概算 BEMとFMBEMの計算効率を問題の未知数のオーダーで概算した(Tab.1). FMBEMについては節点が空間内に2次元的に分布する場合と3次元分布の場合を示した．いずれの場合もBEMと比べ大幅

Tab.1 Comparison between BEM and FMBEM.

	Complexity	Memory
BEM (direct)	$O(N^3)$	$O(N^2)$
BEM (iterative)	$O(N^2)$	$O(N^2)$
FMBEM (3-D distribution)	$O(N)$	$O(N)$
FMBEM (2-D distribution)	$O(N^{1.5})$	$O(N \log N)$

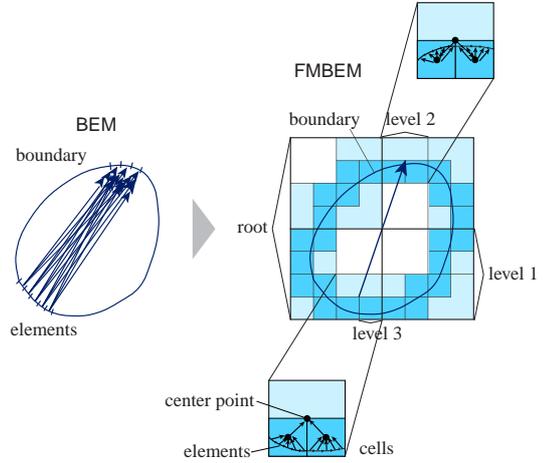


Fig.2 Boundary and hierarchical cells.

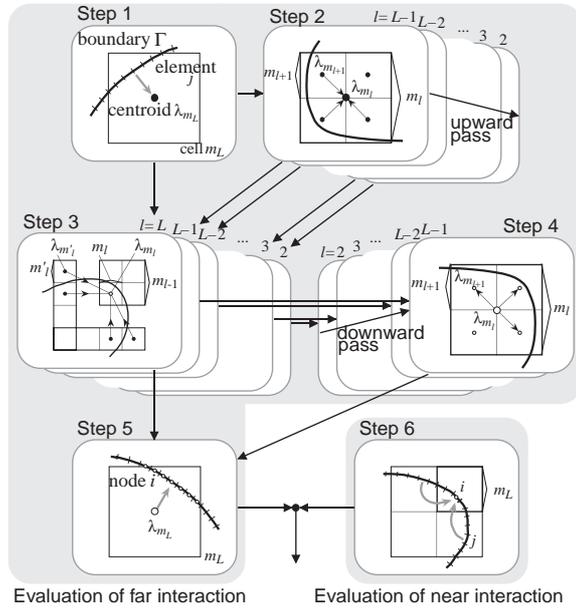


Fig.3 Schematic diagram of the FMBEM.

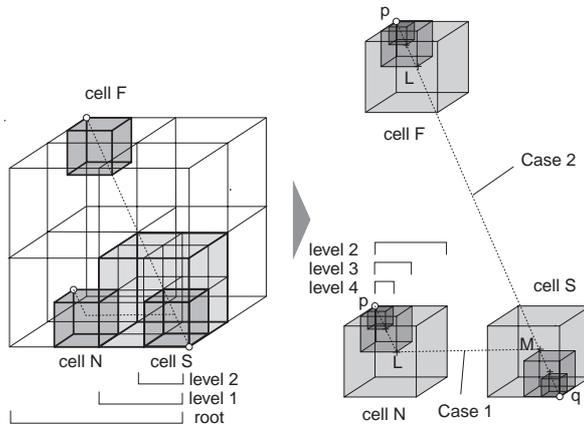


Fig. 4 Geometry of cells and points in cases 1 and 2.

な効率化が期待できる．

3. 計算パラメータの設定に関する検討

3.1. 設定項目 本手法の実行には数値的近似のための各種計算パラメータを設定する必要がある. 具体的には1) Eq.(8)の無限級数和打ち切り次数 N_c , 2) Eq.(10)の単位球面積分点数 $K=2N_k^2$, 3) レベル間で必要積分点数が異なることで生じるレベル間における積分点の補間に必要な点数 Q である. N_c は kD との関係で (k : 波数, D : セルサイズ), K は N_k との関係で記述できることが知られる. いずれも3次元音場基本解の多重極展開表現 Eq.(7) と厳密解 Eq.(6) との比較によるパラメトリックスタディを通して検討する.

3.2. 解析方法 Fig.4に示すセルの位置関係を想定したケーススタディを行う. 点 p, q の位置に応じた2ケースを想定し, 各セル中心点を多重極展開点として Eq.(7) を数値的に評価する.

3.3. 結果と考察

1) 単位球面積分点数: N_c , kD を固定し, N_k を変化した場合の基本解の誤差を Fig.5 に示す. $N_k > N_c$ では振幅・位相の誤差が十分収束することが分かる.

2) 補間点数: 補間法として Lagrange 補間を用い, N_c を固定したときの Q と誤差との関係を検討した. N_c によらず $Q = 16$ では誤差が十分収束することが分かった.

3) 打ち切り次数: 1段階多重極展開(補間無し)において N_c, kD を変化した場合

の誤差を Fig.6 に示す. N_c を Eqs.(10, 11) で規定したグラフを重ねて表示する.

$$N_c = kD + 5 \ln(kD + \pi) + 1 \quad (11)$$

$$N_c = k(\alpha D + (1 - \alpha) r_{LM}) + (r_{LM}/D) \ln(kD + \pi) + 1 \quad (12)$$

Eqs.(11) (既往文献の推奨式) ではケースや kD の範囲により精度が低下すること, Eqs.(12) (セル中心点間距離 r_{LM} を導入した筆者の経験式) ではこれらによらず高精度であることが分かる. 多段階多重極展開(補間多段)において kD を変化した場合の誤差を Fig. 8 に示す. Eq.(12) ではケース, 階層化レベルによらず kD の解析範囲全体で補間による精度低下が見られないことが分かる.

3.4. 設定条件の妥当性の検証 以上の精度の検討から得た設定式を踏まえたFMBEM解析を行い, 効率の面から妥当性を検証する.

1) 解析方法 直方体室(8.0*7.2*4.8m)と点音源

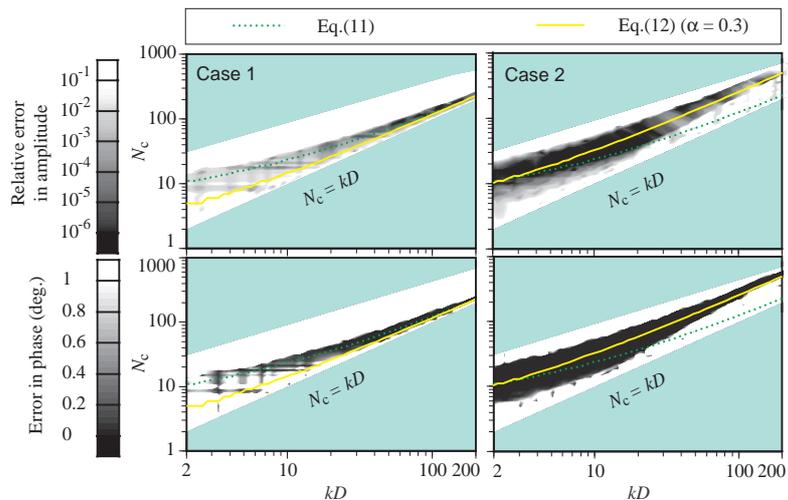


Fig. 6 Two formulae for N_c , overlaid on contour maps of the Errors obtained with the FMA.

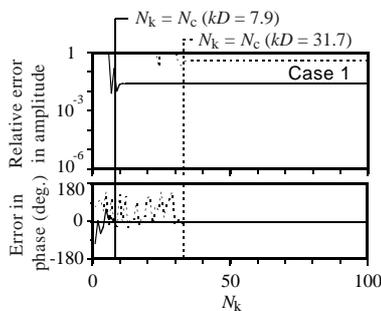


Fig. 5 Errors obtained with the FMA, under two conditions for N_c and kD .

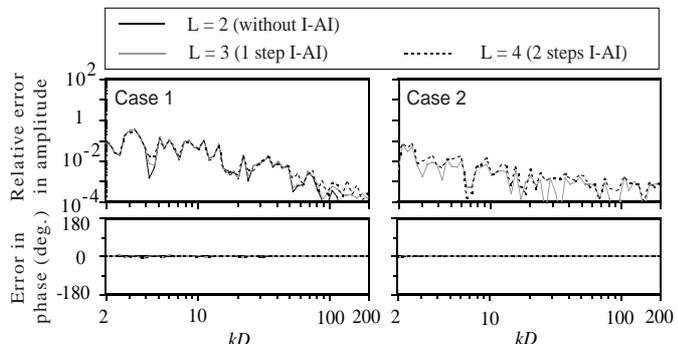


Fig. 7 Errors obtained with the FMA, under the condition for N_c : Eq.(12) (I-AI: interpolation and adjoint interpolation).

からなる解析対象とセル構造を Fig.8 に示す . 境界条件は全面吸音 (吸音率 0.5) とし , 未知数 N , 最下位レベル L を変化させ , BEM と FMBEM の精度 ・ 効率を比較する .

2) 解析結果

計算精度 (Fig.9) : BEM と FMBEM ($L = 5$) による解析結果の良い対応が見られる . L に拠らずに高精度であった .

計算量 ・ 必要記憶容量 (Fig.10, 11) : BEM 解析 (反復解法) では計算量 ・ 必要記憶容量とも $O(N^2)$ であるのに対し , FMBEM 解析では各節点数において最適レベルを選択した場合 計算量が $O(N^{1.3})$, 必要記憶容量が $O(N)$ となっている .

3.5. セル階層化レベルの設定に関する検討

FMBEM は階層セル構造における最下位レベルの設定により計算効率が変わる . ここでは前節の解析結果に基づき , 問題の未知数 N と階層構造化レベル L との関係を検討する .

1) 解析結果 最下位レベルセル内平均節点数 M と計算時間 ・ 必要記憶容量の関係をそれぞれ

Fig.12, 13 に示す . 計算時間 ・ 必要記憶容量が最小となる M は N によらずほぼ一定範囲にあることが分かる . 最適レベルはプログラム及び計算機に依存するが , M の範囲を確認しておくことで各計算機環境における最適レベルを求めることができる .

5. まとめ

大規模音場予測のための高速多重極境界要素法の具体的アルゴリズムを構築し , 手法実行の前提となる各種計算パラメータの設定及び最適構造化レベルの算出方法の提案を行った . 具体的問題への適用により精度 ・ 効率の両面での有効性を確認した .

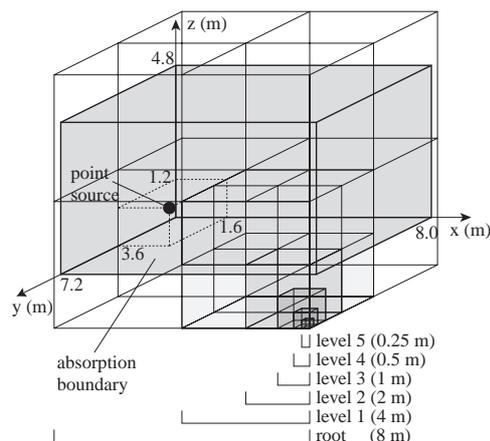


Fig. 8 Geometry of a rectangular room and hierarchical cells.

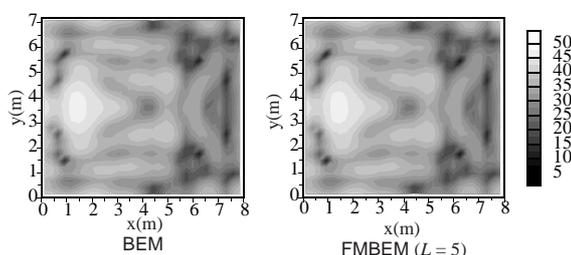


Fig. 9 Sound pressure distribution on the floor obtained with the BEM and with the FMBEM ($L = 5$) ($N = 3672, f = 184.1$ [Hz]).

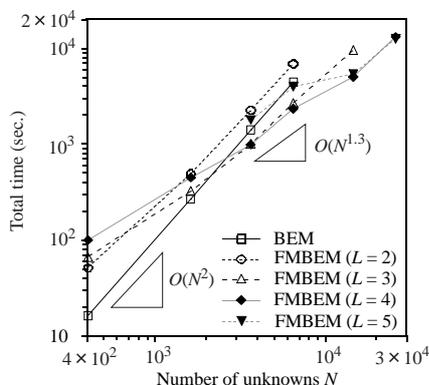


Fig. 10 Computational times for the FMBEM for a rectangular room.

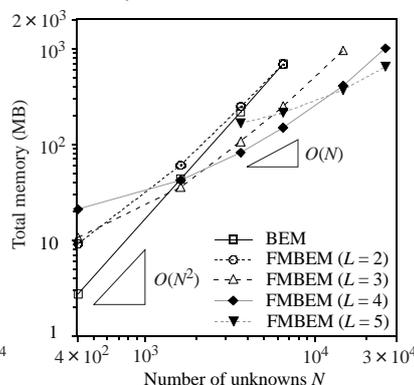


Fig. 11 Memory requirements for the FMBEM for a rectangular room.

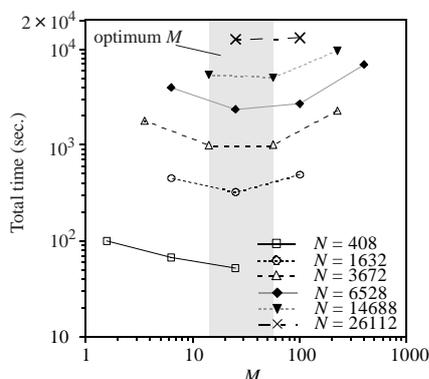


Fig. 12 Computational times for the FMBEM for a rectangular room.

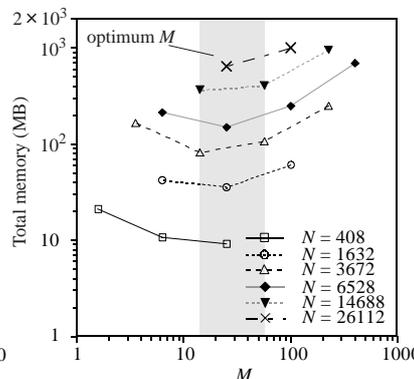


Fig. 13 Memory requirements for the FMBEM for a rectangular room.