高速多重極境界要素法による大規模音場予測に関する研究

Study on Large-Scale Sound Field Analysis using Fast Multipole Boundary Element Method

学籍番号　17635
氏　　名　安田 洋介（Yasuda, Yosuke）
指導教官　佐久間 哲哉 助教授

１．序

1.1 背景　音環境計画において物理的基礎となる音場の予測は重要である. 波動音響的手法は音の波動性を考慮した高精度な予測が可能であるが, 大規模問題において計算量・必要記憶容量が必然的に膨大となる. このため有限要素法（FEM）, 境界要素法（BEM）といった従来の解析手法では, 計算機能力の制約により, 空間領域・周波数領域共に解析範囲が限定される.

1.2　高速多重極境界要素法（fast multipole boundary element method : FMBEM）　高速多重極アルゴリズムは, 大自由度のポテンシャル問題のための高速解法として近年様々な分野で用いられつつある. 本手法はポテンシャルの多重極展開及びグループ化に基づき計算効率を高める手法である．BEMへの適用も試みられており，音響問題のためのBEMに対しても本アルゴリズムの適用により大幅な計算効率の向上が期待できる. その一方, 多重極展開の数値的取り扱いやグループ化の方法等，従来のBEMと比べて検討すべき項目が多く, 高精度化・高効率化にはそれらの適切な設定が必須である.

1.3 目的　境界要素法による3次元大規模音場予測を目指し, 計算効率の大幅な向上のための高速多重極アルゴリズムを適用した境界要素法（高速多重極境界要素法：FMBEM）を構築すること, 及び, 数値解析や理論的考察による検討を通して, 手法の汎用性及び音響問題における適用性向上のための様々な知見を取得することである.

２．解析アルゴリズムの構築

多重極展開理論に, ポテンシャルのグループ化及び多重極展開の多段階化のための階層セル構造を導入し，従来の音響BEMに適用することでFMBEMの解析アルゴリズムを構築する. 通常の境界積分方程式に基づく定式化（BF）の他に，薄板解析に有用な法線方向微分型（NDF）, 外部問題における解の一意性を得るための両者の線形結合型（Burton-Miller法）による定式化を行う.（以下BFの場合のみ示す.）

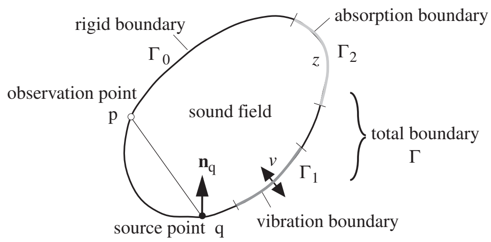

Fig. 1 Illustration of a sound field with three kinds of boundary.

2.1 境界要素法による音場の定式化　Kirchhoff-Helmholtz境界積分方程式にFig.1に示す3種の境界条件を代入し離散化すると, 最終的に以下の連立方程式が得られる.

$$(\mathbf{E}+\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{p} = j\omega\rho\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} \tag{1}$$

$$E_{ij} = -\frac{1}{2}\delta_{ij} \quad (2) \qquad A_{ij} = \int_{\Gamma_1} N_j(\mathbf{r}_\mathrm{q})G(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_\mathrm{q})dS_\mathrm{q} \quad (3)$$

$$B_{ij} = \int_{\Gamma} N_j(\mathbf{r}_\mathrm{q})\frac{\partial G(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_\mathrm{q})}{\partial n_\mathrm{q}}dS_\mathrm{q} \quad (4) \qquad C_{ij} = \frac{jk}{z_j}\int_{\Gamma_2} N_j(\mathbf{r}_\mathrm{q})G(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_\mathrm{q})dS_\mathrm{q} \quad (5)$$

但し，$\mathbf{p}$：音圧ベクトル（未知），$\mathbf{v}$：速度ベクトル（既知），z：比音響インピーダンス，δ_{ij}：クロネッカーのデルタ，N_j：節点jの内挿関数，$\partial/\partial n$：境界面法線方向微分，ρ：空気密度，ω：各周波数.

Eqs.(3, 4, 5)における3次元音場基本解Gは次式で表される.

$$G(\mathbf{r}_\mathrm{p},\mathbf{r}_\mathrm{q}) = \exp(jkr_\mathrm{pq})/4\pi r_\mathrm{pq} \tag{6}$$

但し，k：波数，r_pq：点pq間距離.

Eq.(1)を数値的に解くことにより境界上の音圧が算出され, これを基に領域内部の任意点での音圧が算出される.

2.2 階層セル構造の導入　BEMにおいては影

響関数行列 **A**，**B**，**C** が密な Eq.(1) を解く必要があり，計算量・必要記憶容量の両面で大規模解析における障害となっている．一方FMBEMでは，Eq.(1) に反復解法を用いる際，最も計算量の大きい行列ベクトル積の積和を全節点間で実行する代わりに，セルによる要素のグループ化を通してセル内要素群の寄与をセル代表点の多重極展開として集積し，セル間で影響を評価することにより，計算量を大幅に低減する．さらに，セルの階層構造を導入して多重極アルゴリズムを多段階に適用することで一層の効率化を図る．Fig.2に2次元問題における階層セル構造の例を示す．境界全体を内包するルートセルを設定し，下位レベルのセルへと階層化する．要素からの寄与は，まず要素の所属する最下位レベルセル中心点における多重極展開として集積され（Fig.3：ステップ1），同様に各セルの所属する上位セル中心点へと集積される（ステップ2）．集積された寄与は遠方のセル中心点における影響へと変換・集積される（ステップ3）．集積された影響は自身の下位レベルのセル中心点へと逐次分配され（ステップ4），最下位レベルにおいて要素にまで分配される（ステップ5）．最後に多重極展開で扱えない近傍のセルからの影響を要素同士で直接算出する（ステップ6）．以上の評価方法により，行列を直接算出することなく行列ベクトル積を効率的に生成する．必要記憶容量に関しても，行列保持の必要がないことから大幅な低減となる．

2.3 多重極展開による影響関数の表現　3次元音場基本解Eq.(6)を階層セル構造に対応付けた多重極展開表現で表すと次式となる．

$$G(\mathbf{r}_\mathrm{p},\mathbf{r}_\mathrm{q}) = \frac{jk}{16\pi^2}\oint E_{\mathrm{p}\lambda_{m_L}}(\mathbf{k})\prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m_{l+1}}\lambda_{m_l}}(\mathbf{k}) \cdot T_{\lambda_{m_I}\lambda_{m'_I}}(\mathbf{k})\prod_{l=I}^{L-1} E_{\lambda_{m'_l}\lambda_{m'_{l+1}}}(\mathbf{k})E_{\lambda_{m'_L}\mathrm{q}}(\mathbf{k})d\hat{\mathbf{k}} \tag{7}$$

$$T_\mathrm{LM}(\mathbf{k}) = \sum_{l=0}^{N_\mathrm{c}} j^l(2l+1)h_l^{(1)}(kr_\mathrm{LM})P_l(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{LM}) \tag{8}$$

$$E_\mathrm{pq}(\mathbf{k}) = \exp(j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\mathrm{pq}) \tag{9}$$

Table 1 Comparison between BEM and FMBEM.

	Complexity	Memory
BEM (direct method)	$O(N^3)$	$O(N^2)$
BEM (iterative method)	$O(N^2)$	$O(N^2)$
FMBEM (3D distribution)	$O(N)$	$O(N)$
FMBEM (2D distribution)	$O(N^{1.5})$	$O(N\log N)$

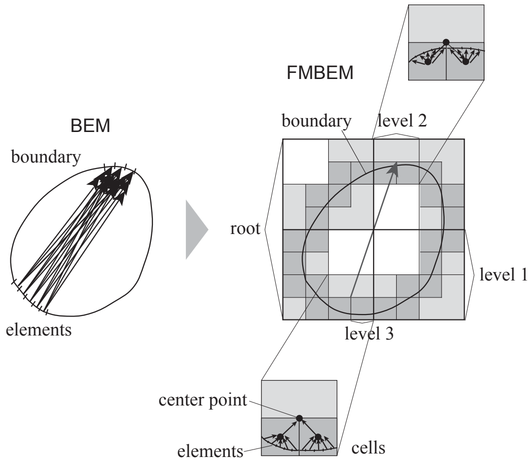

Fig. 2 Boundary and hierarchical cell structure.

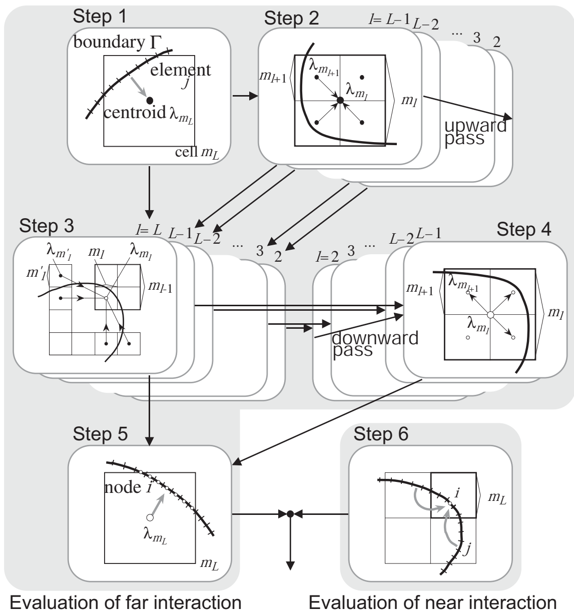

Fig. 3 Schematic diagram of the FMBEM.

$$\oint f(\hat{\mathbf{k}})d\hat{\mathbf{k}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi = \sum_{i=1}^{N_\mathrm{k}}\sum_{j=1}^{2N_\mathrm{k}} w_i^\mathrm{g} w_j^\mathrm{c} f(\theta_i,\varphi_j) = \sum_{n=1}^{K} w_n f(\hat{\mathbf{k}}_n) \tag{10}$$

但し，$\mathbf{k}$：波数ベクトル，$\hat{\mathbf{k}}$：波数単位ベクトル，$\oint d\hat{\mathbf{k}}$：単位球面積分，$h_l^{(1)}$：第1種球Hankel関数，P_l：Legendre多項式，N_c：無限級数和打ち切り次数，w：積分点の重み．

上式をBEMの各影響関数Eqs.(3, 4, 5) に対応付けることで，Eq.(1) における各行列ベクトル積の多重極展開表現が可能となる．

2.4 計算効率の理論的概算　BEMとFMBEMの計算効率を問題の節点数（未知数）Nのオーダーで概算した（Table 1）．FMBEMについては空間内での節点分布が2次元的な場合と3次元的な場合を示した．いずれもBEMと比べ大幅

な効率化が期待できる.

３． 解析アルゴリズムの有効性の検証

構築したアルゴリズムをコンピューターに実装し,理論解と比較可能な音響管問題に適用することでアルゴリズムの有効性を検証した. FMBEMにより大幅な効率化が可能なことを確認した. また, 多重極展開の数値的近似のための計算パラメータの設定が精度に影響を及ぼすことを解析例から確認し,パラメータの適切な設定が必要なことを示した.

４． 多重極展開の設定条件に関する検討

多重極展開理論は数学的には近似ではなく厳密であるが,数値計算上は近似的取り扱いのために以下に示す計算パラメータを設定することとなる. 任意の問題にFMBEMを適用可能とするにはこれらを精度･効率の観点から適切に設定する必要がある.

(i) Eq.(8)の無限級数和打ち切り次数N_c

(ii) Eq.(10)の単位球面積分分点数$K = 2N_k^2$

(iii) レベル間で必要積分点数Kが異なることで生じる，積分点の補間に必要な点数Q

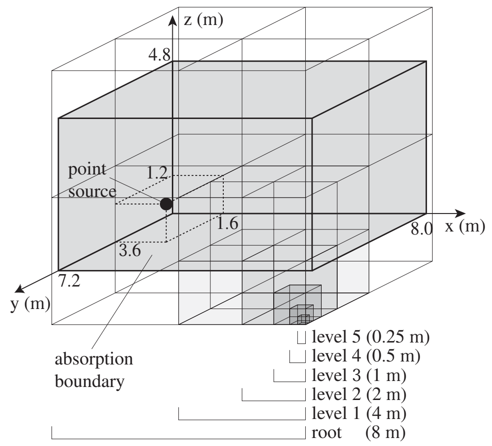

Fig. 4 Geometry of a rectangular room and hierarchical cells.

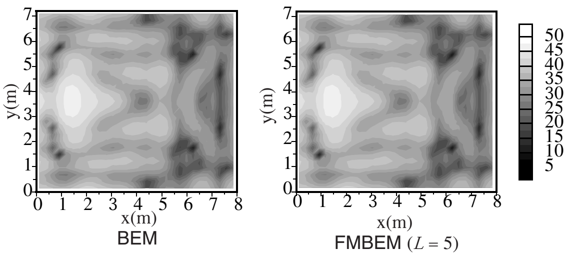

Fig. 5 Sound pressure level distribution on the floor obtained with the BEM and with the FMBEM (L = 5).
(at 184.1Hz, N = 3672)

4.1 設定式の提案 3次元音場基本解の多重極展開表現Eq.(7)と厳密解Eq.(6)の数値計算結果を比較するケーススタディを行い，以下に示す具体的な設定式を経験式として提案した.

$$N_c = \left\lfloor k(\alpha D + (1-\alpha) r_{LM}) + \frac{r_{LM}}{D}\ln(kD+\pi) \right\rfloor + 1,\quad 0 \le \alpha \le 1 \qquad (11)$$

$$N_k = N_c \quad (12) \qquad\qquad Q = 16 \quad (13)$$

但し，D：セルを内包する球の直径，r_{LM}：セル中心点間距離.

4.2 設定条件の妥当性の検証 以上の精度の検討から得た設定式を踏まえたFMBEM解析を行い，効率の面から妥当性を検証する.

1）解析方法 直方体室（8.0 × 7.2 × 4.8m）と点音源からなる解析対象と階層セル構造をFig.4に示す. 境界条件は全面吸音（吸音率0.5）とし，節点数N, セル階層化レベルLを変化させ，BEMとFMBEMの精度・効率を比較する.

2）解析結果 計算精度（Fig.5）：BEMとFMBEM（L = 5）で解析結果の良い対応が見られる．FMBEMはLに拠らず高精度であった. **計算量・必要記憶容量**（Fig.6, 7）：BEM解析（反復解法）では計算量・必要記憶容量とも$O(N^2)$であるのに対し，FMBEM解析では各未知数において最適なレベルを選択した場合，計算量が$O(N^{1.3})$，必要記憶容量が$O(N)$にまで低減している.

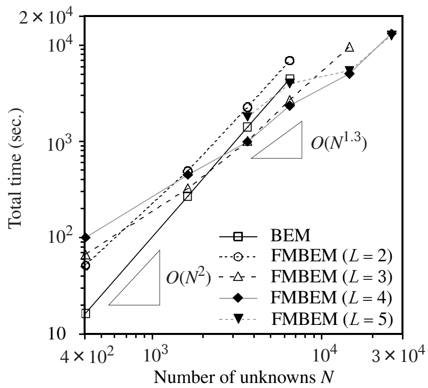

Fig. 6 Computational times with the BEM and with the FMBEM for a rectangular room.

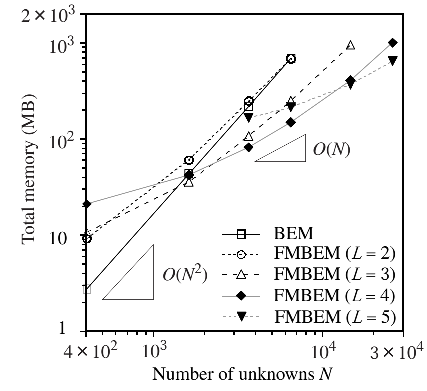

Fig. 7 Memory requirements with the BEM and with the FMBEM for a rectangular room.

5．階層セル構造に関する検討

FMBEMは階層セル構造の設定により計算効率が変化する手法であり，解析対象に対するセル構造の配置や階層化レベルに関して効率的な設定方法を確立する必要がある．

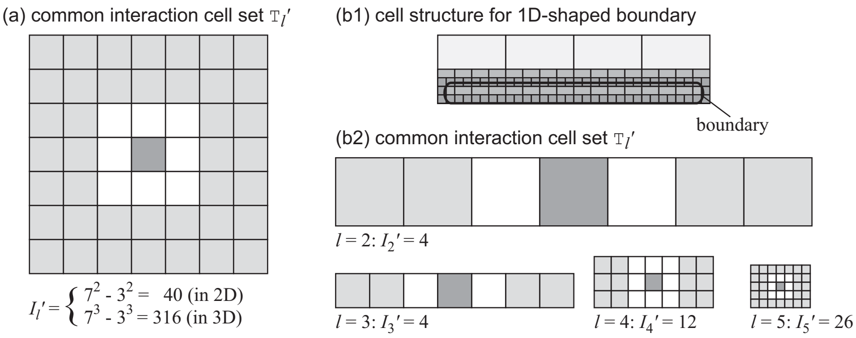

Fig. 8 (a) T$_l$′ : common interacion cell set for calculation of T_{LM} at level l for arbitrarily-shaped boundary, (b1) Example of 1D-shaped boundary and hierarchical cell structure, and (b2) its common interaction cell set T$_l$′ at levels. I_l′ is the number of cells belonging to T$_l$′ .

5.1 境界形状を考慮した階層セル構造の設定

境界形状に依存せずに効率化するための階層セル構造の設定方法について検討する．

1) 境界形状が計算効率に与える影響
理論的概算及び数値解析を通して，1次元的境界形状の問題においてFMBEMの計算効率が著しく低下すること，その主原因がセル間の寄与変換係数T_{LM}（Eq.(8)）に関わる計算量・必要記憶容量の膨大化であることがわかった．

2) 階層セル構造の設定　任意形状の問題に対応するためには，相互作用を計算する全てのセル同士の位置関係を考慮して，各レベルにて316のセル間（Fig.8(a)における中心セルとセル群T$_l$’）でT_{LM}を算出する必要がある．境界形状が1次元的な場合には境界全体を内包するルートセルが大きくなるため，セルサイズDの増大により2，3次元的形状の場合に比べN_c，K（$= 2N_c^2$）が増大し（Eq.(11)参照），T_{LM}の計算量・必要記憶容量の膨大化につながる．そこで1次元的問題に対しては階層セル構造の配置に配慮し，Fig.8(b1)に示すように，境界要素を内包するセル数を各レベルにおいて極力低減する．この配置に対して，必要最小限のセル群T$_l$’を各レベルで想定することにより効率化を図る．セル群T$_l$’の1例をFig.8(b2)に示す．

3) 数値解析による検討　**検討方法**：1次元的な境界形状を持つ解析対象のFMBEM解析を行う．解析対象と階層セル構造の位置関係が異なる3ケースを設定する（Fig.9：(a)配慮なし，(b)セルサイズを最小化，(c)セル数を最小化）．境界は全面剛とし，四角形一定要素にて解析波長の1/8以下のサイズに離散化した．なお，以下のグラフでは比較対象としてほぼ同自由度の立方体の解析結果を併示する．

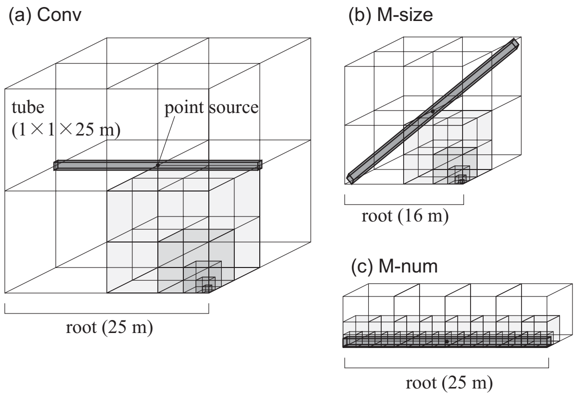

Fig. 9 Three arrangements of hierarchical cell structure for numerical analysis.

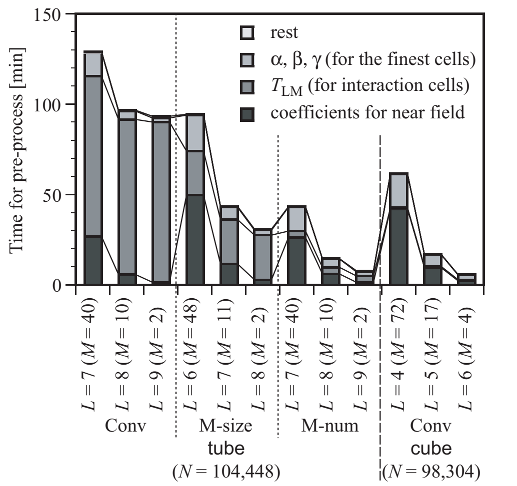

Fig. 10 Computational times for pre-process of FMBEM with 3 arrangements of hierarchical cell structure.

結果と考察：セットアップ部の計算時間をFig. 10に示す．ConvではT_{LM}の計算時間の割合が高く，立方体の解析時に比べ著しく計算時間が増大している．T_{LM}に関しては階層化レベルLによらずConvに比べM-size，M-num共に低減

されているが，M-numの場合はこれが特に顕著であり，計算時間全体として立方体の解析時とほぼ同様にまで低減されている．なお，必要記憶容量についても同様の結果となった．このことから，1次元的形状の問題における効率低下に対する本設定方法（Fig.8(b1, b2)）の有効性が示されたと言える．

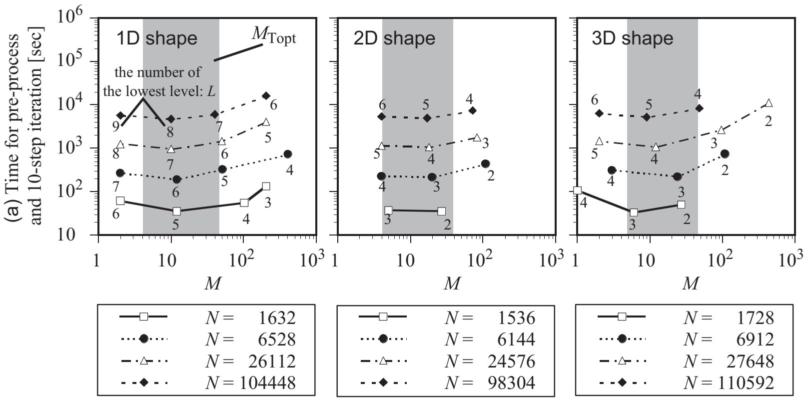

Fig. 11 Relation between computational time and the average number M of nodes in a lowest level cell. Gray areas roughly indicate the ranges of M for optimizing computational time (M_{Topt}).

5.2 セル階層化レベルの設定　ここでは境界形状の異なる3ケースのFMBEM解析を通して，問題の節点数Nと計算効率を最適化するセル階層化レベルLとの関係を検討した．最下位レベルセル内平均節点数Mと計算時間との関係をFig.11に示す．計算時間を最小化するM（M_{Topt}）は境界形状・Nによらずほぼ一定範囲にあることがわかる．このことから，予めM_{Topt}の範囲を確認しておくことで任意の問題における最適レベルL_{Topt}を逆算することができる．必要記憶容量についても同様であった．

5.3 対称形音場の解析における効率化手法　無限大剛面上の音場など，対称形音場を解析する機会は多い．ここでは階層セル構造の応用的な利用法として，セル計算を対称形の半領域のみに限定する効率化手法を提案する．

1）解析手法　対称形音場における境界と階層セル構造の一例をFig.10に示す．対称形を考慮して，下位レベルのセルは対称形の半領域のみで生成し（Fig.10では上部半領域のみ）セル間の影響評価を行う．但しステップ3，6においては，セルが対称面付近にある場合に鏡像領域（Fig.10では下部半領域）にあるセルからの影響を考慮する必要があるためアルゴリズム上の工夫が必要である．計算のための節点数・セル数が1/2となることから，計算量・必要

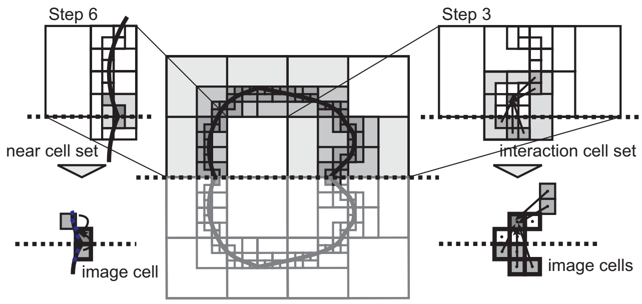

Fig. 12 Boundary and hierarchical cells for a plane-symmetric sound field.

Table 2 Computational efficiency for analyzing a sound field in a rigid cube d [m] wide, with a point source at the center. (kd = 73.12)

Type of FMBEM	N	Time [sec]	Memory [MB]
conventional	98,304	24,235	1,486.8
symmetrical	49,152	11,848	799.6

記憶容量共におよそ1/2となる．

2）解析結果　剛な立方体（中心に点音源）の内部音場の解析における計算効率をTable 2に示す．通常のFMBEMに比べ，本効率化手法では計算時間・必要記憶容量共におよそ半分にまで低減されている．

６．　反復解法の収束性に関する検討

FMBEMは連立方程式の解法として反復解法の適用を前提としており，この収束が計算時間に直接関係する．一般に収束性は解析問題に大きく依存するが，実用性の観点からは，問題の性質と各解法の適性を，解法実行にあたっての適切な設定を含めてある程度把握することが重要である．ここでは個々の音響問題に適した反復解法の選定，及び収束改善のための前処理，初期値等の適切な設定のための知見を得ることを目的として，各種要因が及ぼす収束性への影響についてFMBEM解析を通して検討する．

6.1 検討方法　検討は内部問題と外部問題に分け，それぞれ単純形状・複雑形状の2問題を用意する．解析対

象の一部をFig.13に示す．収束性状への影響要因として，(i) 解析対象に関わるもの（境界条件，形状，解析周波数（固有周波数か否か），問題の自由度），(ii) 定式化の種類（BF，NDF，Burton-Miller 法），(iii) 反復解法の種類（CGS，BiCGStab，BiCGStab2，GPBiCG）を考える．また，収束改善法として，前処理（=対角化前処理），初期シャドウ残差の設定（=擬似乱数），初期近似解の設定（=周波数軸上の隣接解）を考え，これらの有無による影響も調べた．

Table 3 Numerical results for iterative methods. $\mathbf{p}_0^*$ is the initial shadow residual, and $\mathbf{x}_0$ is the initial guess. A < B means that the number of iteration with A is smaller than that with B.

	internal problem	external problem
formulation	BF < NDF	BF < NDF < BM
method	GPBiCG	BiCGStab2 < BiCGStab < CGS
shape	simple < complex	
boundary condition	absorption < rigid	-
diagonal preconditioning	not effective with BF	effective with NDF and BM
$\mathbf{p}_0^*$ = pseudorandom numbers	quite effective with CGS, not effective with other methods	
$\mathbf{x}_0$ = previous solution in FRF	effective with simply-shaped objects	

6.2 結果と考察　結果の概要をTable 3に示す．また，結果の一部をFig.14～16に示す．本計算結果から推奨される設定は，(i)内部問題の解析時：BF + GPBiCG (BiCGStab2)，(ii) 外部問題の解析時：Burton-Miller法 + CGS +「初期シャドウ残差=擬似乱数」，（見かけの固有周波数近傍以外ではBF + GPBiCG (BiCGStab2)），(iii)周波数応答関数算出：「初期近似解＝周波数軸上の隣接解」となる．

7．　総括

大規模音場予測のための高速多重極境界要素法を構築し，手法の効果的実行のための設定条件の提案，汎用性向上のための知見の取得を行った．本研究では逐次計算のみを扱った．今や身近になりつつある並列計算への対応が課題である．

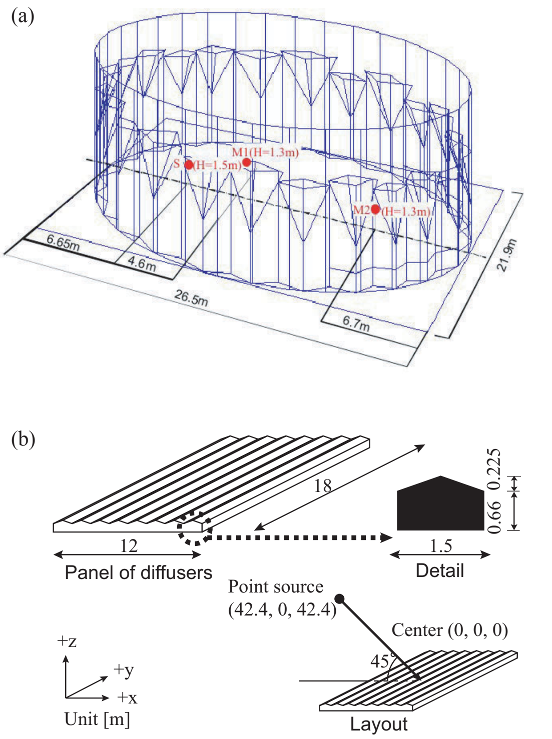

Fig. 13 (a) A hall for an internal problem, and (b) a panel of diffusers for an external problem.

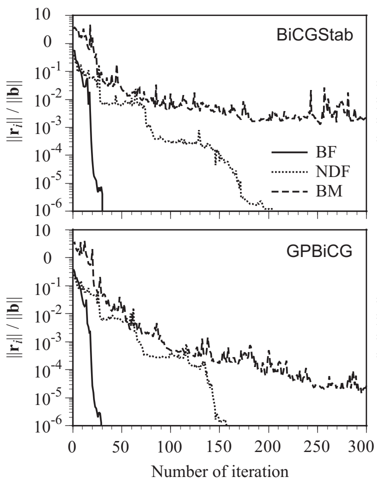

Fig. 14 The effect of formulations. (around a vibration cube at 2000Hz, $N = 24576$)

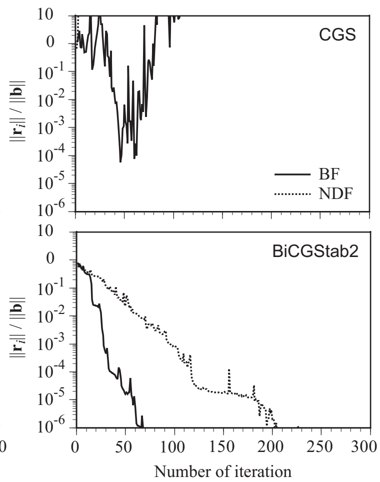

Fig. 15 The effect of iterative methods. (in a rigid cube at 2000Hz, $N = 24576$)

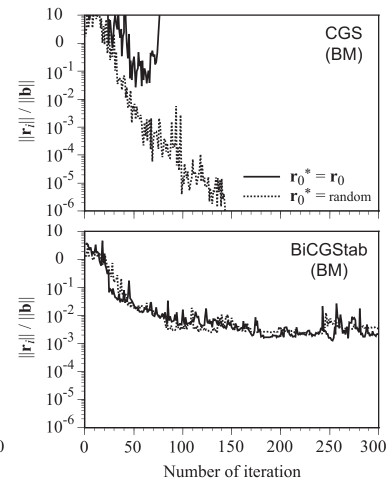

Fig. 16 The effect of initial shadow residuals. (in a rigid cube at 2000Hz, $N = 24576$)